

Diagramma di Nyquist

- Rappresentazione in frequenza dei sistemi dinamici
- Rappresentazione polare di Nyquist (*diagramma di Nyquist*)
- Esempi di tracciamento del diagramma di Nyquist

Rappresentazione in frequenza dei sistemi dinamici

Un qualunque sistema dinamico lineare può essere rappresentato mediante la sua funzione di trasferimento: **un rapporto di polinomi nella variabile complessa s**



$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)};$$

$$N(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i = b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i) \quad z_i: \text{zeri del sistema}$$

$$D(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad p_i: \text{poli del sistema}$$

La variabile complessa s può essere valutata lungo l'asse immaginario:

$$s = j\omega$$

$$G(j\omega) = K' \frac{(j\omega)^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i (j\omega)^i}{(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i (j\omega)^i} = K \frac{(j\omega)^\kappa \prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\omega \mu_i) \prod_{i=1}^{m_2} \left(1 + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}{(j\omega)^\nu \prod_{i=1}^{n_1} (1 + j\omega \tau_i) \prod_{i=1}^{n_2} \left(1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}$$

Rappresentazione in frequenza dei sistemi dinamici

Se ha senso fisico la trasformata di Laplace della risposta impulsiva del sistema assume il significato di risposta armonica del sistema, ovvero di risposta a regime del sistema soggetto a segnali sinusoidali con pulsazione ω

$$G(j\omega) = K' \frac{(j\omega)^{\bar{m}} + \sum_{i=0}^{\bar{m}-1} b_i (j\omega)^i}{(j\omega)^{\bar{n}} + \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} a_i (j\omega)^i} = K \frac{(j\omega)^\kappa \prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\omega \mu_i) \prod_{i=1}^{m_2} \left(1 + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}{(j\omega)^\nu \prod_{i=1}^{n_1} (1 + j\omega \tau_i) \prod_{i=1}^{n_2} \left(1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}$$

$$z_i = \frac{-1}{\mu_i}$$

zeri reali

$$z_{j,j+1} = -\zeta_j \omega_{n_j} \pm j \omega_{n_j} \sqrt{1 - \zeta_j^2}$$

zeri complessi e coniugati

$$p_i = \frac{-1}{\tau_i}$$

poli reali

$$z_{j,j+1} = -\xi_j \omega_{n_j} \pm j \omega_{n_j} \sqrt{1 - \xi_j^2}$$

poli complessi e coniugati

$$\bar{m} = \kappa + m_1 + m_2$$

numero complessivo di zeri

$$\bar{n} = \nu + n_1 + n_2$$

numero complessivo di poli

$$K'$$

guadagno in alta frequenza

$$K$$

guadagno in bassa frequenza (*di Bode*)

Rappresentazione in frequenza dei sistemi dinamici

La risposta armonica del sistema, ovvero di risposta a regime del sistema soggetto a segnali sinusoidali con pulsazione ω

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\omega\mu_i) \prod_{i=1}^{m_2} \left(1 + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}{(j\omega)^\nu \prod_{i=1}^{n_1} (1 + j\omega\tau_i) \prod_{i=1}^{n_2} \left(1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}$$

$$\nu = \nu - \kappa$$

$$m = m_1 + m_2 + \max\{0; -\nu\}$$

$$n = n_1 + n_2 + \max\{0; \nu\}$$

differenza poli-zeri nell'origine

numero di zeri

numero di poli

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

Rappresentazione polare di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

$$G(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{\hat{m}} \hat{b}_i (j\omega)^i}{(j\omega)^\nu \left((j\omega)^{\hat{n}} + \sum_{i=0}^{\hat{n}-1} \hat{a}_i (j\omega)^i \right)}$$

$$\nu = \nu - \kappa$$

$$\hat{m} = m_1 + m_2$$

$$\hat{n} = n_1 + n_2$$

$$K' = \hat{b}_{\hat{m}}$$

$$K = \frac{\hat{b}_0}{\hat{a}_0}$$

differenza poli-zeri nell'origine

numero di zeri non nulli

numero di poli non nullo

Guadagno in alta frequenza

Guadagno in bassa frequenza

Rappresentazione di Bode

$$G(j\omega) = M(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}; \quad M(j\omega) = |G(j\omega)| \quad \varphi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\}$$

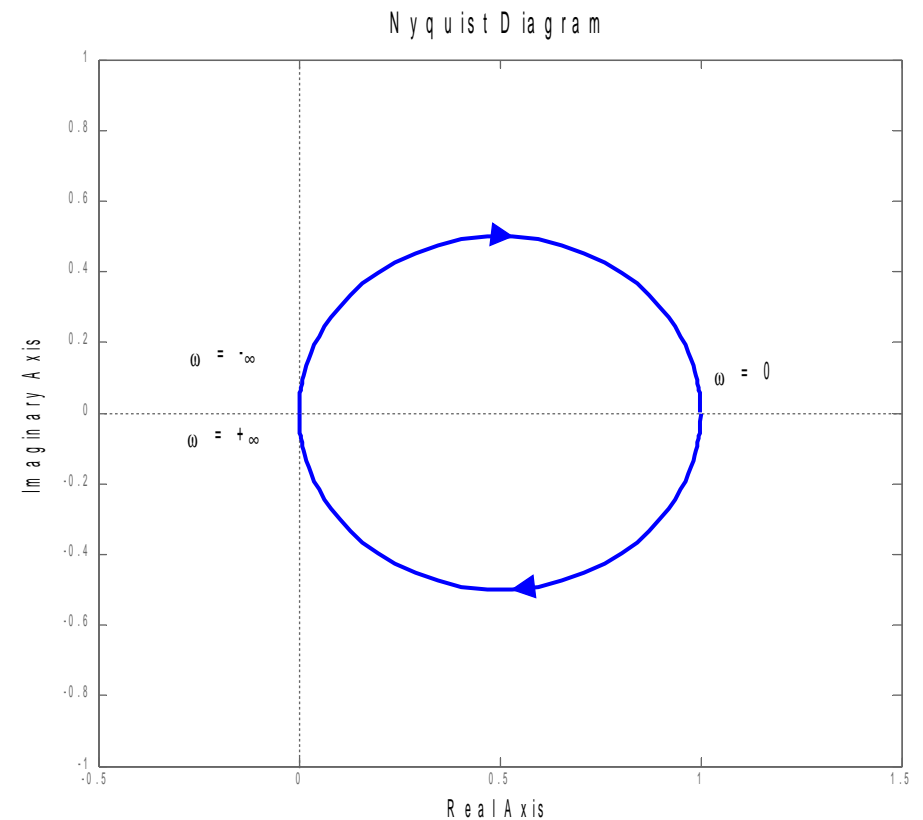
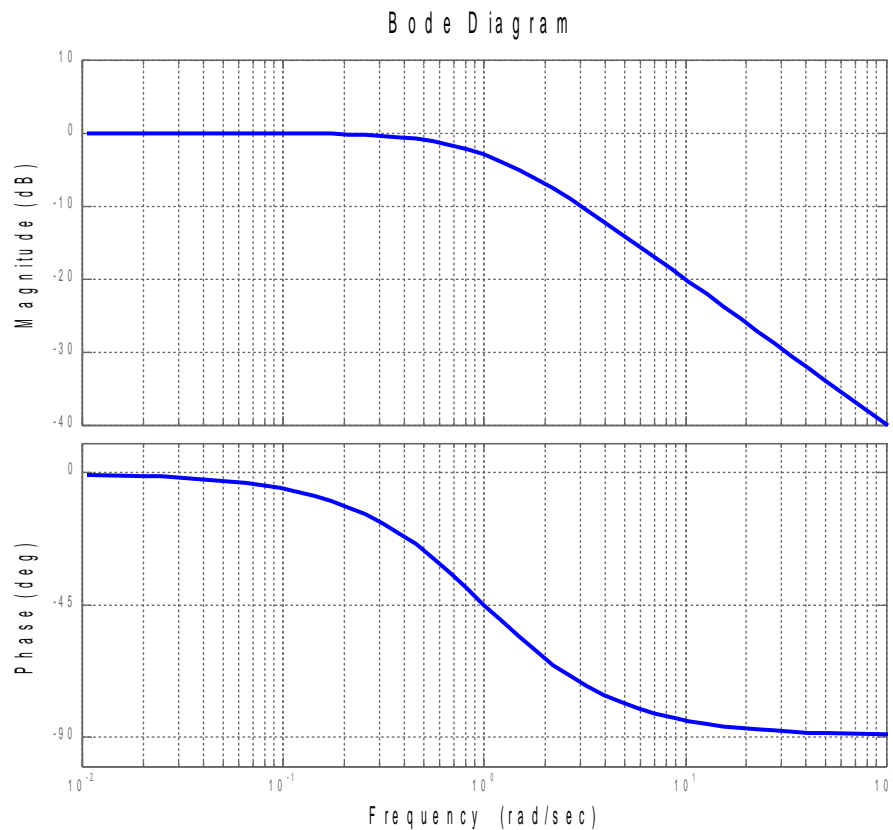
Rappresentazione di Nyquist

$$G(j\omega) = A(j\omega) + jB(j\omega); \quad A(j\omega) = \Re\{G(j\omega)\} \quad B(j\omega) = \Im\{G(j\omega)\}$$

Rappresentazione polare di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$



Rappresentazione polare di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

$$G(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\omega\mu_i) \prod_{i=1}^{m_2} \left(1 + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}{(j\omega)^\nu \prod_{i=1}^{n_1} (1 + j\omega\tau_i) \prod_{i=1}^{n_2} \left(1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 \right)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +0} \frac{K}{(j\omega)^\nu}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} |G(j\omega)| = \begin{cases} K & \nu < 0 \\ |K| & \nu = 0 \\ +\infty & \nu > 0 \end{cases}$$

zeri nell'origine
né zeri né poli nell'origine
poli nell'origine

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \arg \{G(j\omega)\} = \arg \{K\} - \frac{\pi}{2} \nu$$

Rappresentazione polare di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

$$G(j\omega) = K' \frac{(j\omega)^{\bar{m}} + \sum_{i=0}^{\bar{m}-1} b_i (j\omega)^i}{(j\omega)^{\bar{n}} + \sum_{i=0}^{\bar{n}-1} a_i (j\omega)^i}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} K' \frac{(j\omega)^m}{(j\omega)^n}$$

$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(j\omega) =$	0	$m < n$	sistema strettamente proprio
$ K' $	$m = n$		sistema proprio
$+\infty$	$m > n$		sistema non causale

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \{G(j\omega)\} = \arg \{K'\} - \frac{\pi}{2} (n - m)$$

Rappresentazione polare di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

$$G(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{\hat{m}} \hat{b}_i (j\omega)^i}{(j\omega)^v \left((j\omega)^{\hat{n}} + \sum_{i=0}^{\hat{n}-1} \hat{a}_i (j\omega)^i \right)}$$

Rappresentazione di Bode

$$G(j\omega) = M(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}; \quad M(j\omega) = |G(j\omega)| \quad \varphi(\omega) = \arg\{G(j\omega)\}$$

Il modulo di un numero complesso è una funzione pari $M(-j\omega) = M(j\omega)$

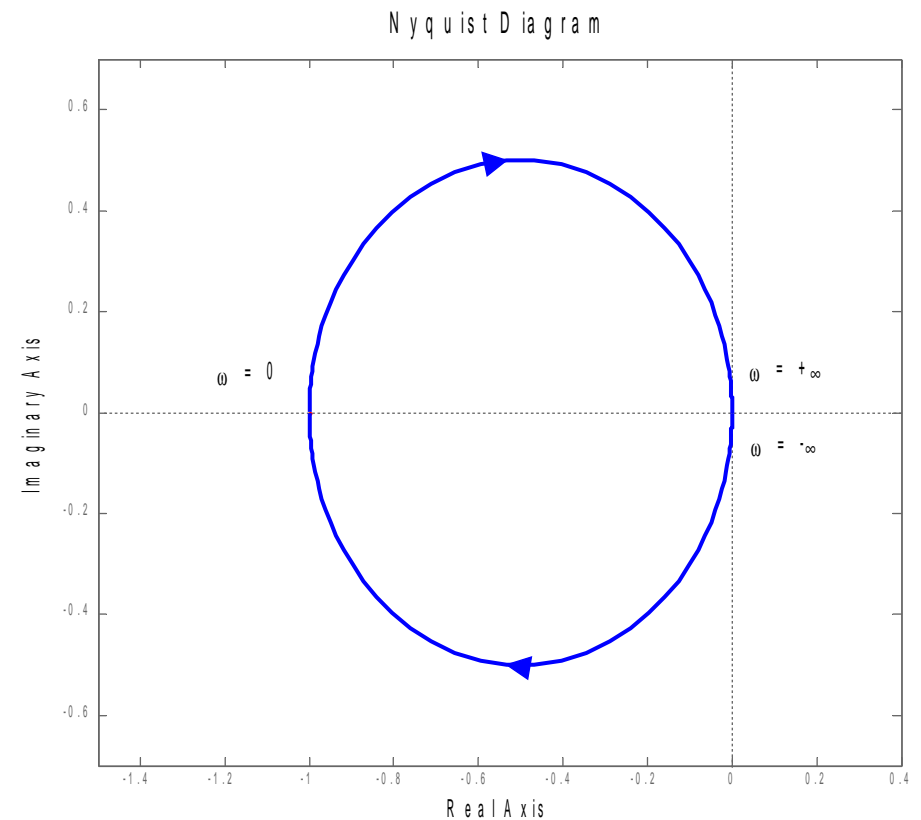
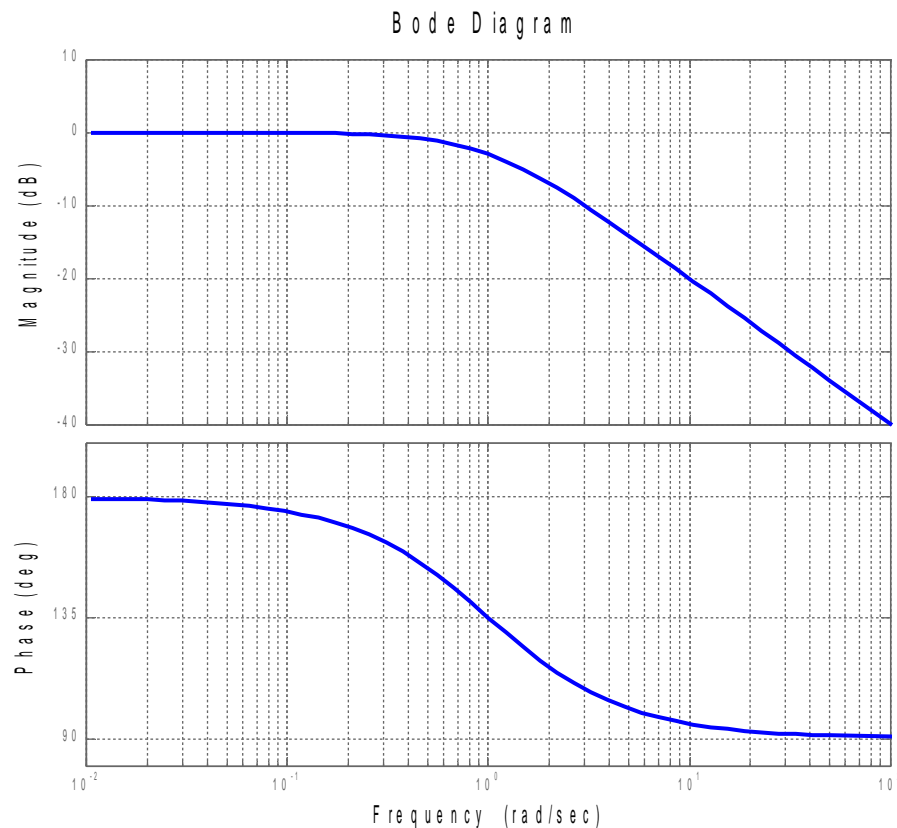
La fase di un numero complesso è una funzione dispari $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$

Il diagramma di Nyquist tra $-\infty$ e $+\infty$ è simmetrico rispetto l'asse reale

Esempi di tracciamento del diagramma di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

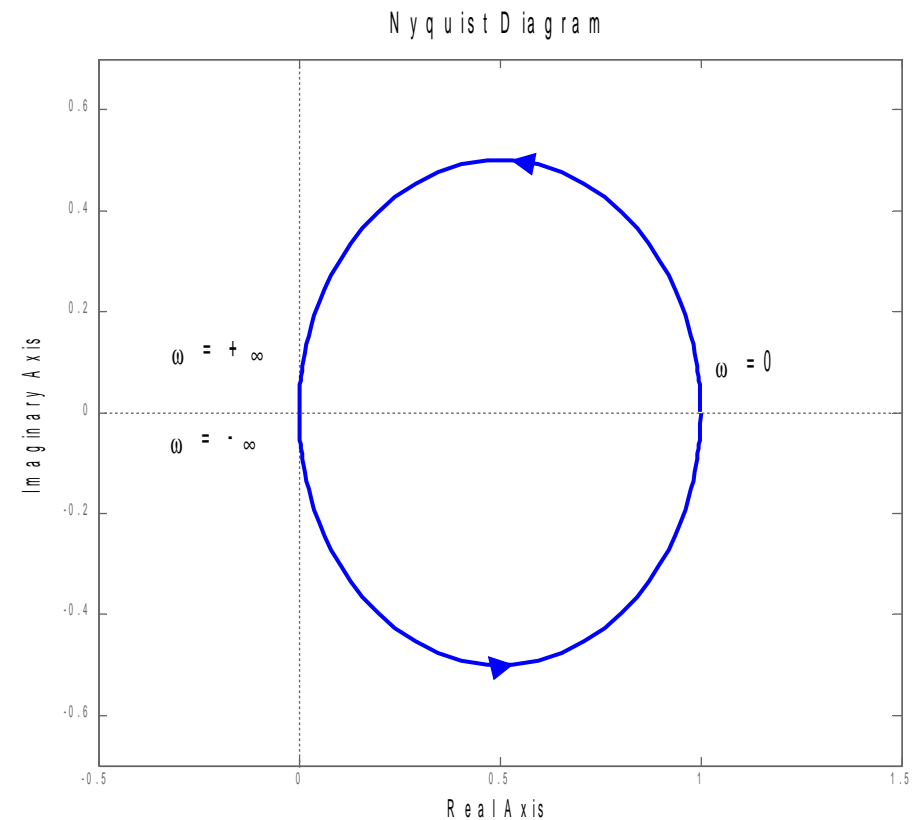
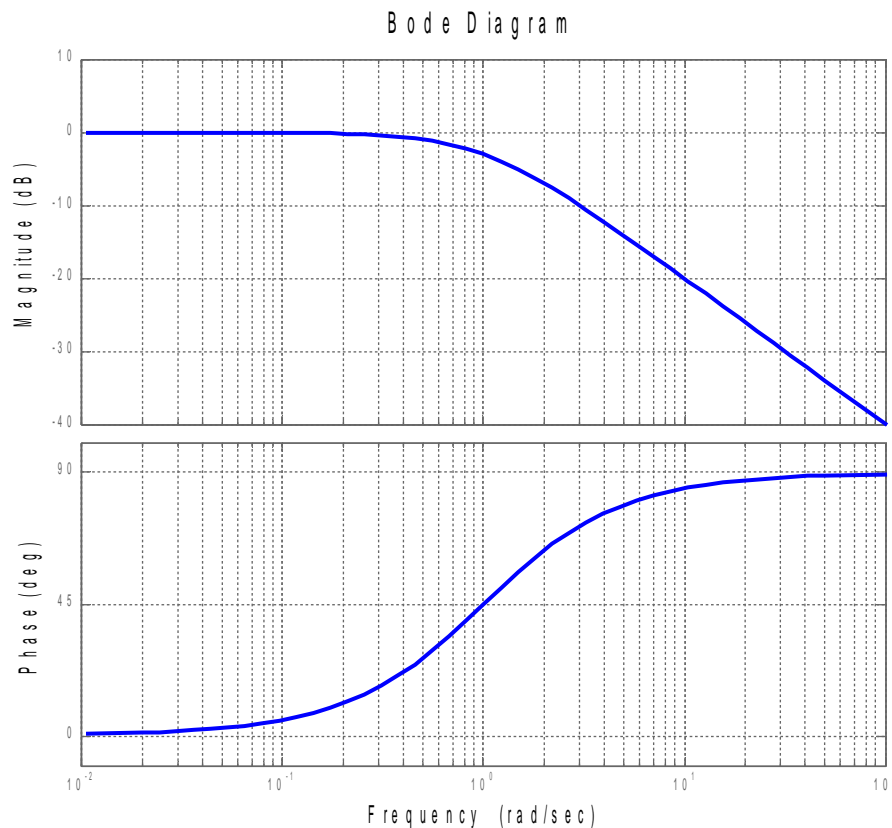
$$G(j\omega) = \frac{-1}{1+j\omega}$$



Esempi di tracciamento del diagramma di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

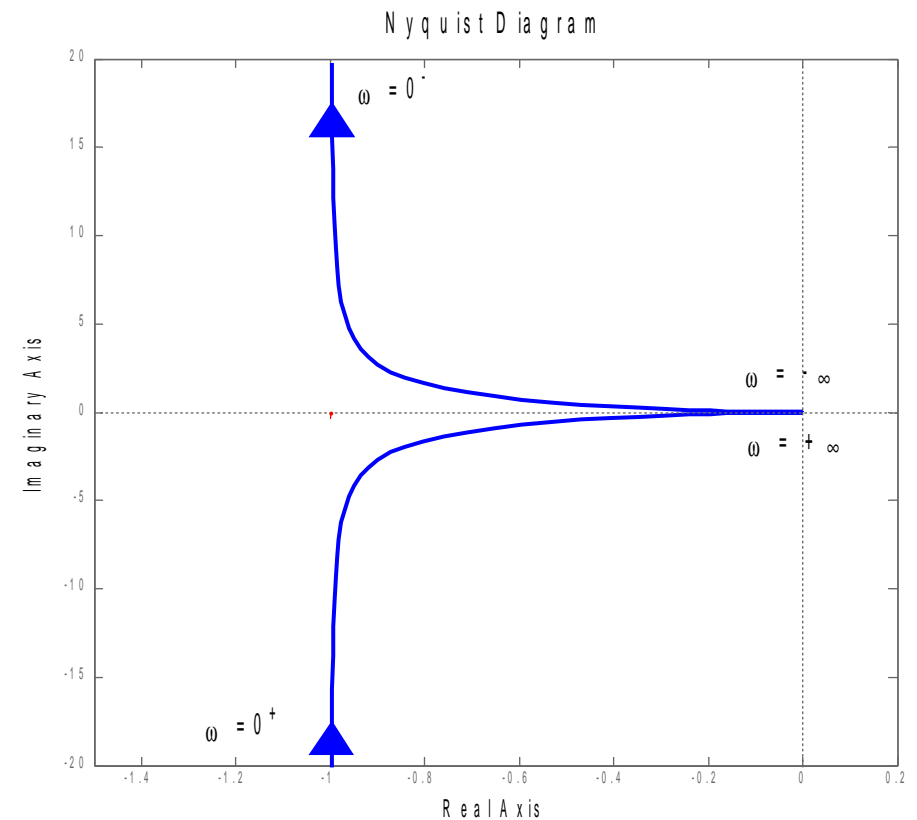
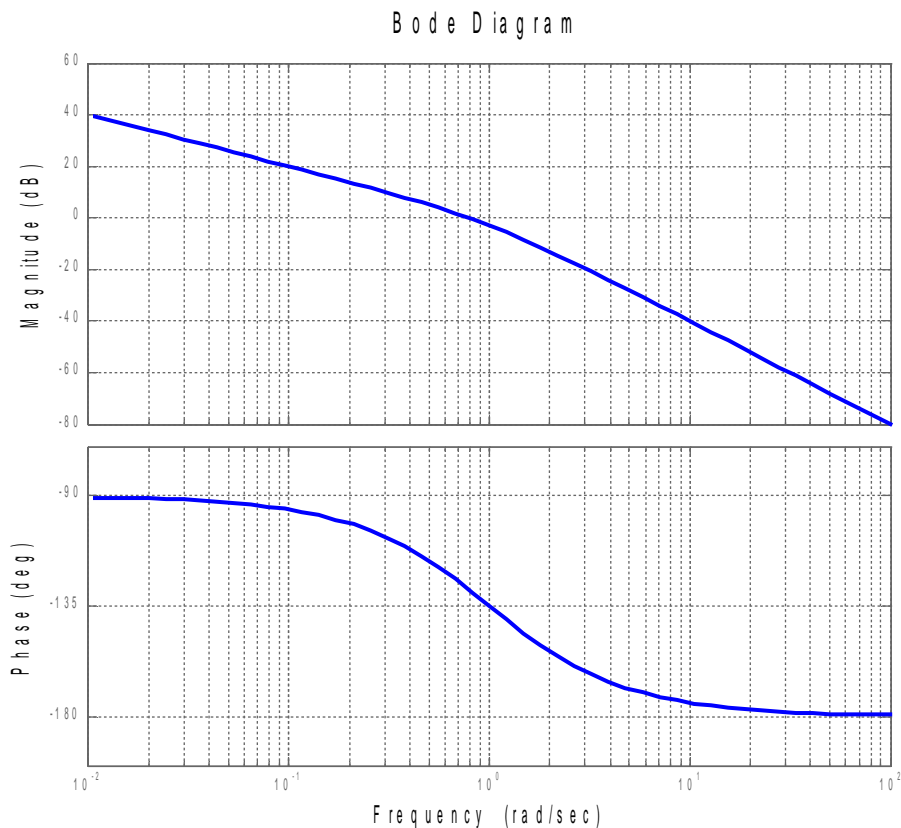
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega}$$



Esempi di tracciamento del diagramma di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

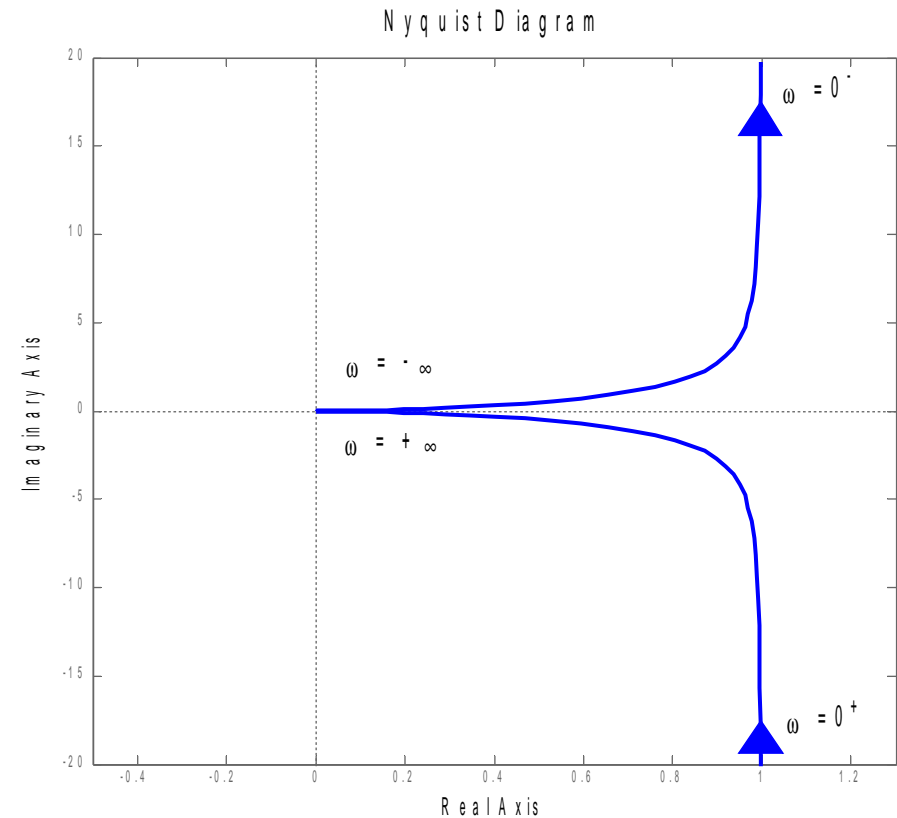
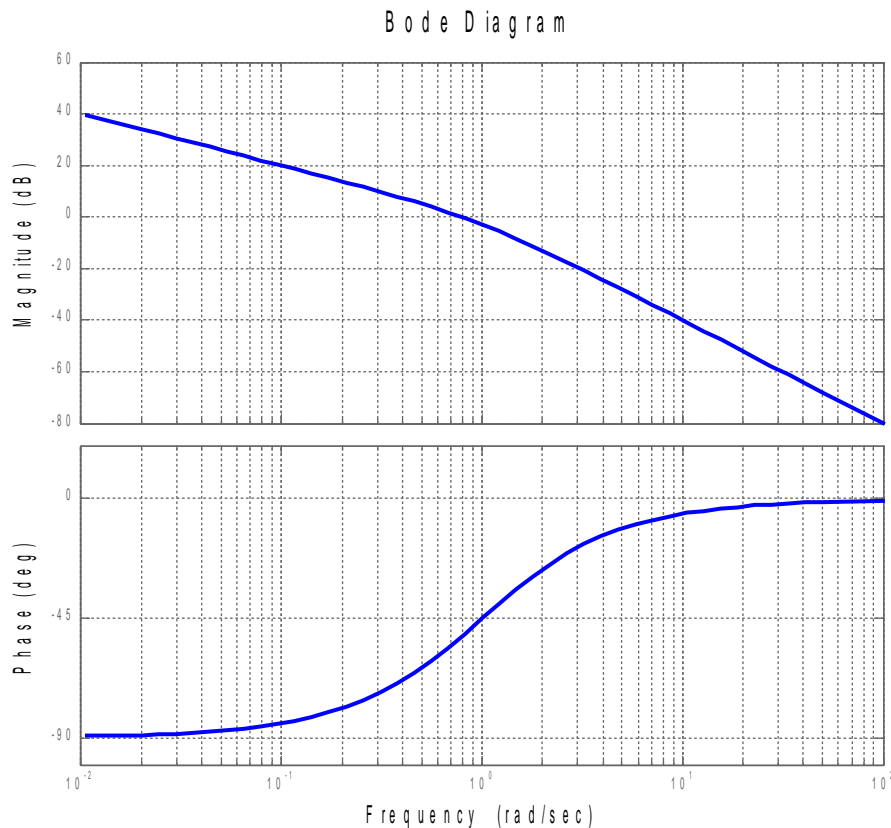
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)}$$



Esempi di tracciamento del diagramma di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1-j\omega)}$$



Esempi di tracciamento del diagramma di Nyquist

Per ogni valore di pulsazione ω , la risposta armonica è un numero complesso

$$G(j\omega) = \frac{1 + j2\omega}{(1 + j\omega)(1 + j0,2\omega)}$$

